ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THU LOAN

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO NHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VECTƠ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THU LOAN

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO NHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VECTƠ

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Đỗ Văn Lưu

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu **ii**

Mở đầu **1**

1 Điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ có ràng buộc **4**

1.1. Dưới vi phân Clarke và dưới vi phân Michel–Penot 4

1.2. Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ qua dưới vi phân Clarke 6

1.3. Điều kiện tối ưu qua dưới vi phân Michel–Penot 17

2 Nghiệm xấp xỉ và điều kiện tối ưu cho bất đẳng thức biến phân vectơ **26**

2.1. Các khái niệm và định nghĩa 26

2.2. Điều kiện tối ưu cho nghiệm xấp xỉ của bất đẳng thức biến phân vectơ 28

Kết luận **37**

Tài liệu tham khảo **38**

Bảng ký hiệu

X^*	Đối ngẫu tô pô của không gian X;
$\mathrm{int}A$	Phần trong của tập A;
$f^0(\overline{x}, v)$	đạo hàm suy rộng Clarke của f tại $\overline{x}$ theo phương v
$\partial f(\bar{x})$	Dưới vi phân Clarke của f tại $\bar{x}$;
$f^{\Diamond}(\bar{x}; v)$	Đạo hàm Michel - Penot của f tại $\bar{x}$ theo phương v;
$\partial^{MP} f(\bar{x})$	Dưới vi phân Michel - Penot của f tại $\bar{x}$;
$\nabla_G f(\bar{x})$	Đạo hàm Gâteaux của f tại $\bar{x}$;
$\nabla f(\bar{x})$	Đạo hàm Fréchet của f tại $\bar{x}$;
$N(C; \overline{x})$	Nón pháp tuyến của C tại $\overline{x} \in C$;
$T(C; \overline{x})$	Nón tiếp tuyến của C tại $\overline{x}$;
co	Bao lồi
cone co A	Nón sinh ra bởi bao lồi của A;
lin	Bao tuyến tính
D^*	Nón đối ngẫu của D.
$I(\overline{x})$	Tập các chỉ số ràng buộc tích cực
$\mathbb{R}^m_+$	Orthant không âm của $\mathbb{R}^m$
$\mathbb{R}^m_{++}$	Orthant dương của $\mathbb{R}^m$
$\langle x^*, x \rangle$	Giá trị của $x^* \in X^*$ tại $x \in X$;
$\mathrm{Ker}\nabla h(\overline{x})$	Hạch của $\nabla h(\overline{x})$;
t.ư.	Tương ứng

Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân và các ứng dụng của nó được trình bày trong cuốn sách của Kinderlehrer và Stampachia [10]. Trong những năm gần đây, bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu do phạm vi áp dụng rộng rãi của nó. Người ta nghiên cứu bài toán bất đẳng thức biến phân về sự tồn tại nghiệm, điều kiện tối ưu, đối ngẫu, thuật toán tìm nghiệm, tính ổn định nghiệm và cấu trúc tập nghiệm.

Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ không trơn được nghiên cứu qua các dưới vi phân Clarke, Michel–Penot, Mordukhovich và dưới vi phân suy rộng. D.V. Luu và D.D. Hang [12] đã thiết lập các điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu toàn cục và nghiệm hữu hiệu của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarke và dưới vi phân Michel–Penot. X.Q. Yang và X.Y. Zheng [17] đã dẫn các điều kiện tối ưu cho nghiệm xấp xỉ của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ không trơn. Đây là vấn đề có tính thời sự được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Do đó, tôi chọn đề tài: "Điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ".

Luận văn trình bày điều kiện tối ưu cho các loại nghiệm hữu hiệu của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ không trơn qua các dưới vi phân Clarke và Michel–Penot của D.V. Luu và D.D. Hang đăng trong tạp chí *J. Math. Anal. Appl.* 412 (2014), 792–804, và điều kiện tối ưu cho nghiệm xấp xỉ của bất đăng thức biến phân vectơ không trơn trong không gian Banach của X.Q. Yang và X.Y. Zheng đăng trong tạp chí *J. Glob. Optim.* 40 (2008), 455–462.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.
Chương 1. Điều kiện tối ưu cho nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ: trình bày các điều kiện tối ưu cho các nghiệm hữu hiệu yếu, nghiêm hữu hiệu toàn cục và nghiệm hữu hiệu của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ qua dưới vi phân Clarke và dưới vi phân Michel–Penot.
Chương 2. Nghiệm xấp xỉ và điều kiện tối ưu cho bất đẳng thức biến phân vectơ: trình bày các điều kiện cần và các điều kiện đủ cho nghiệm xấp xỉ của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ không trơn trong không gian Banach.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Đỗ Văn Lưu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới thầy hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán, nhà trường và các phòng chức năng của trường, khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn anh chị em trong lớp cao học và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 4 năm 2019

Tác giả luận văn

Nguyễn Thu Loan

Chương 1

Điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ có ràng buộc

Chương 1 trình bày các điều kiện cần và các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu, nghiệm hữu hiệu toàn cục của bất đẳng thức biến phân vectơ không trơn có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập trong không gian Banach. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo trong [12].

1.1. Dưới vi phân Clarke và dưới vi phân Michel–Penot

Giả sử X là không gian Banach, X^* là không gian đối ngẫu tôpô của X, $\bar{x} \in X$ và f là hàm giá trị thực xác định trên X.

Trong [2], đạo hàm theo phương Clarke của f tại $\bar{x}$ theo phương v được xác định như sau:

$$f^0(\bar{x}; v) = \limsup_{x \to \bar{x}, t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Dưới vi phân Clarke của f tại $\bar{x}$ được xác định bởi:

$$\partial f(\bar{x}) = \left\{ \xi \in X^* :< \xi, v >\leq f^0(\bar{x}; v),\ \forall v \in X \right\},$$

trong đó $< \xi, v >$ là giá trị của $\xi \in X^*$ tại $x \in X$. Chú ý rằng dưới vi phân Clarke của f được quy về đạo hàm thông thường khi f khả vi chặt.

Trong [13], đạo hàm theo phương Michel - Penot của f tại $\bar{x}$ theo phương v được xác định bởi:

$$f^{\diamondsuit}(\bar{x}; v) = \sup_{\omega \in X} \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + t(v + \omega)) - f(\bar{x} + t\omega)}{t}.$$

Dưới vi phân Michel - Penot của f tại $\bar{x}$ là

$$\partial^{MP} f(\bar{x}) = \left\{ \xi \in X^* :< \xi, v > \leq f^{\diamondsuit}(\bar{x}; v),\ \forall v \in X \right\}.$$

Chú ý rằng nếu f khả vi Gâteaux tại $\bar{x}$, $\partial^{MP} f(\bar{x}) = \{\nabla_G f(\bar{x})\}$, trong đó $\nabla_G f(\bar{x})$ là đạo hàm Gâteaux của f tại $\bar{x}$. Nếu f khả vỉ Fréchet tại $\bar{x}$ với đạo hàm Fréchet $\nabla f(\bar{x})$, thì $\partial^{MP} f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$. Nếu f là Lipschitz địa phương với hằng số L, hàm $f^0(\bar{x}; .)$ và $f^{\diamondsuit}(\bar{x}; .)$ là thuần nhất dương, dưới cộng tính trên X, Lipschitz với hằng số L trên X, trong đó $\partial f(\bar{x})$ và $\partial^{MP} f(\bar{x})$ khác rỗng, lồi, compact *yếu của X^* và $\parallel \xi \parallel$ với mọi $\xi \in \partial f(\bar{x})$ và $\xi \in \partial^{MP} f(\bar{x})$. Khi f là hàm Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, ta có

$$f^{\diamondsuit}(\bar{x}, v) \leq f^0(\bar{x}, v),\ (\forall v \in X),$$

$$\partial^{MP} f(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x}).$$

Nếu f là hàm thực lồi trên X, thì dưới vi phân của hàm lồi f tại $\bar{x}$ được định nghĩa như sau:

$$\partial_C f(\bar{x}) := \{\xi \in X^* : \langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}),\ \forall x \in X\}.$$

Nhắc lại Định lý 4.9 [1] và Mệnh đề 7.3.9(d) [16].

Mệnh đề 1.1

Giả sử $A : X \to Y$ là ánh xạ tuyến tính liên tục và f là hàm thực lồi trên Y. Khi đó, với mỗi $x \in X$,

$$A^* \partial_C f(Ax) \subset \partial_C (fA)(x).$$

Nếu f là liên tục tại mọi điểm thuộc ImA, thì với mỗi $x \in X$,

$$A^*\partial_C f(Ax) = \partial_C(fA)(x),$$

trong đó $A^* : Y^* \to X^*$ là ánh xạ liên hợp của A, ImA là ảnh của A.

Mệnh đề 1.2

Nếu f lồi trên X và Lipschitz địa phương tại $\bar{x} \in X$ thì với mỗi $v \in X$,

$$f^{\Diamond}(\bar{x}, v) = f^0(\bar{x}, v).$$

$$\partial^{MP} f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) = \partial_C f(\bar{x}).$$

Nón tiếp tuyến Clarke của $C \subset X$ tại điểm $\bar{x} \in C$ được định nghĩa như sau:

$$T(C;\bar{x}) := \{v \in X : \forall x_n \in C,\ x_n \to \bar{x},\ \forall t_n \downarrow 0, \exists v_n \to v \text{ sao cho } x_n + t_n v_n \in C, \forall n\}.$$

Nón pháp tuyến Clarke của C tại $\bar{x}$ là

$$N(C;\bar{x}) := \{\xi \in X^* : \langle \xi, v\rangle \leq 0, \forall v \in T(C;\bar{x})\}.$$

Các nón $T(C;\bar{x})$ và $N(C;\bar{x})$ là lồi khác rỗng, $T(C;\bar{x})$ là đóng và $N(C;\bar{x})$ là đóng *yếu.

Với mỗi nón $D \subset X$, nón đối ngẫu của D được định nghĩa như sau:

$$D^* = \{\xi \in X^* : \langle \xi, v\rangle \geq 0, \forall v \in D\}.$$

1.2. Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ qua dưới vi phân Clarke

Giả sử X là không gian Banach thực và T là ánh xạ từ X vào không gian $\mathcal{L}(X, Y)$ gồm các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y. Với mỗi $x \in X, T(x)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục từ X vào Y. Giả sử g và h là ánh xạ từ X vào $\mathbb{R}^m$ và $\mathbb{R}^l$. Khi đó, $g = (g_1, ..., g_m), h = (h_1, .., h_l)$. Giả